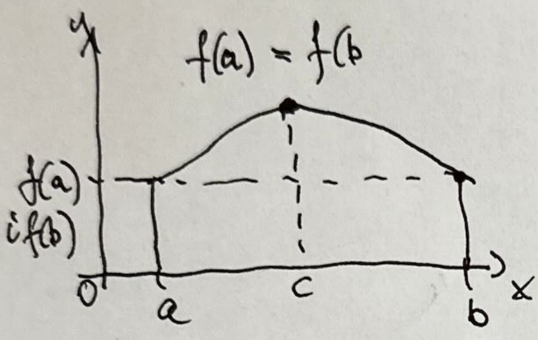
Ważne twierdzenia w rachunku całkowym

Twierdzenie Rolle'a

Funkcja różniczkowalna przyjmująca równe wartości w dwóch różnych punktach ma pomiędzy nimi punkt stacjonarny tzn. punkt, w którym nachylenie prostej stycznej do wykresu funkcji względem osi OX jest równe zeru.



Uwaga: Twierdzenie to znał w 1150 roku indyjski matematyk Bhaskaraćarya, w 1691 r francuski matematyk Michel Rolle opublikował je w szczególnym przypadku dotyczącym wielomianów.

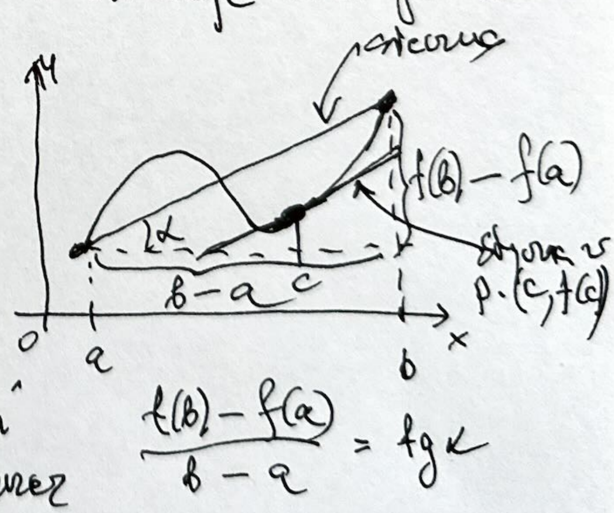
Wersja standardowa sformułowania twierdzenia

Niech f będzie ciągłą funkcją rzeczywistą ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) na przedziale domkniętym $[a, b]$, różniczkowalną na przedziale otwartym (a, b). Wówczas jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = 0$.

Twierdzenie Lagrange'a (uogólnienie twierdzenia Rolle'a)

Jeśli dana funkcja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Po przekształceniu

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha$$

Oznacza to, że przyrost wartości funkcji dla argumentów a i b wyraża się przez przyrost wartości zmiennej i pochodną funkcji w pewnym punkcie pośrednim między a i b.

Styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(c, f(c))$ jest równoległa do siecznej przechodzącej przez punkt $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$

Twierdzenie Cauchy'ego (uogólnienie twierdzenia Lagrange'a a przez to i Rolle'a

Jeżeli dane funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalne w przedziale (a,b), to istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że

$$g'(c)\cdot|f(b)-f(a)| = f'(c)\cdot|g(b)-g(a)|$$

Dowód

Zdefiniujmy funkcję $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ w następujący sposób

$$h(x) = (f(b)-f(a))\cdot g(x) - (g(b)-g(a))\cdot f(x)$$

Funkcja h jest różniczkowalna na (a,b) oraz $h(a)=h(b)$

(Wykazać, że $h(a)=h(b)$)

Ponadto

$$0 = h'(c) = (f(b)-f(a))\cdot g'(c) - (g(b)-g(a))\cdot f'(c)$$

Czyli $g'(c)\cdot(f(b)-f(a)) = f'(c)\cdot(g(b)-g(a))$ ⊠

Wniosek

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalne w przedziale (a,b) oraz dodatkowo $g'(x)\neq 0$ dla $x\in(a,b)$, to istnieje taki punkt $c\in(a,b)$, że

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$